

Risoluzione dei circuiti elettrici col metodo dei sistemi di equazioni

Definizioni e breve richiamo alle principali leggi dei circuiti elettrici

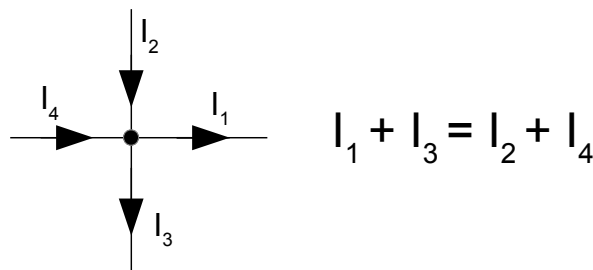
Risolvere un circuito elettrico significa determinare i valori delle correnti che circolano nei vari rami e dei potenziali presenti nei vari punti del circuito. Per fare questo esistono diversi metodi che si basano sulle leggi fondamentali di Ohm e di Kirchhoff. Il metodo descritto in queste pagine consiste nell'impostare un sistema di equazioni, tante quante sono le grandezze incognite del circuito.

Legge di Ohm: la tensione (*o differenza di potenziale*) presente ai capi di un resistore è pari al prodotto tra la corrente che lo attraversa ed il valore della sua resistenza.

$$V = R * I$$

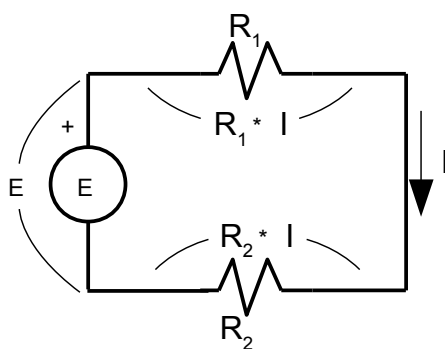
1° principio di Kirchhoff (*equazioni ai nodi*):

la somma delle correnti entranti è uguale alla somma delle correnti uscenti da un nodo.



2° principio di Kirchhoff (*equazioni alle maglie*):

la somma algebrica delle tensioni ai capi dei componenti presenti in una maglia è pari a zero.



$$R_1 I + R_2 I - E = 0$$

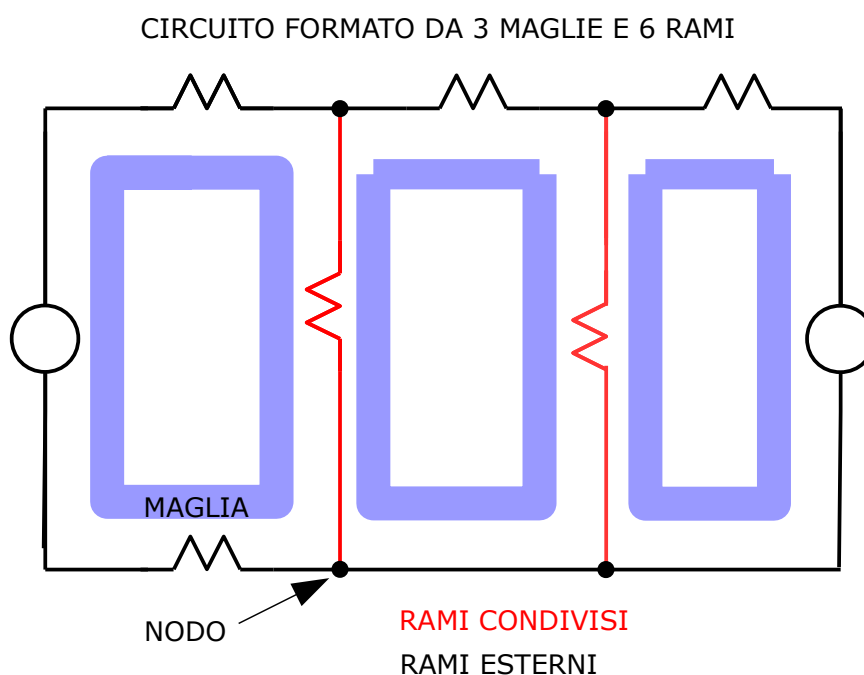
Come vedremo di seguito le cadute di tensione vanno prese col segno positivo o negativo in base alla polarità dei componenti.

Ramo: è una parte del circuito che contiene uno o più componenti in serie tra loro; è compreso tra due nodi.

Maglia: è un insieme di rami che formano un percorso chiuso; un ramo di una maglia può essere esterno oppure condiviso con un'altra maglia.

Nell'esempio sotto ciascuna delle due maglie laterali ha un ramo esterno ed uno condiviso, mentre la maglia centrale ha due rami esterni e due condivisi.

Nodo: punto di connessione tra più rami.



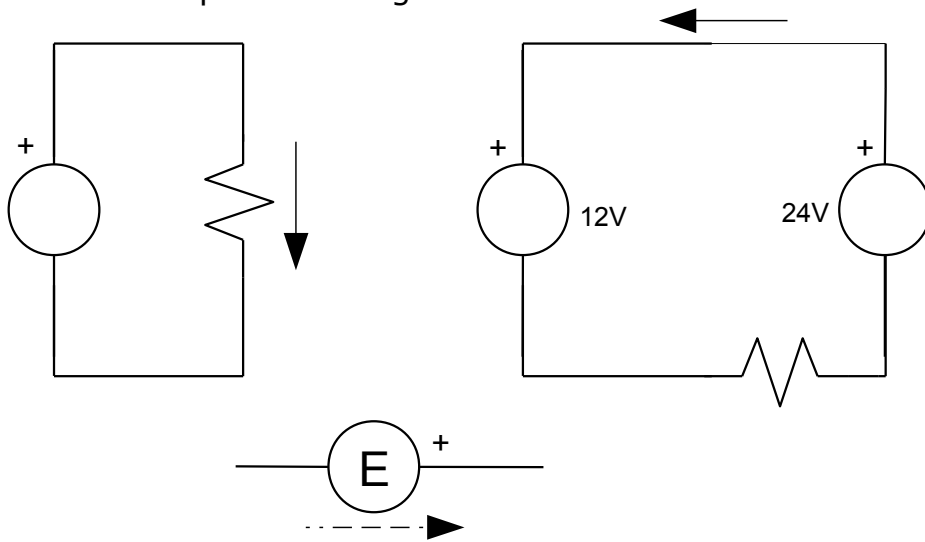
Componenti e convenzioni

Generatore di tensione: è un dispositivo che produce ai suoi capi una differenza di potenziale (E) di un determinato valore, indipendentemente dalle caratteristiche del circuito in cui lavora (*trascorrendo la resistenza interna*).

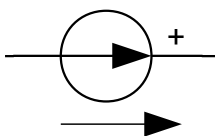
Il verso della corrente che circola in un generatore di tensione non è necessariamente legato alla sua polarità (*figura sotto*).

Se nel circuito è presente soltanto un generatore di tensione (*senza altri bipoli attivi*), la corrente che vi circola esce dal polo positivo.

Se invece sono presenti più generatori si ha una sovrapposizione degli effetti: di conseguenza la corrente potrebbe scorrere in senso contrario, pur rimanendo invariata la polarità del generatore.



Generatore di corrente: è un dispositivo che impone il valore ed il verso della corrente nel ramo in cui è contenuto. Ai capi di un generatore di corrente vi è una caduta di tensione (V), che dipende dal resto del circuito e che va in ogni caso considerata nelle equazioni.



Se è l'unico generatore presente nel circuito la sua polarità sarà quella mostrata nella figura accanto.

Resistore: assume la polarità in base al verso della corrente che lo attraversa.



La polarità dei componenti di un circuito è importante per la corretta impostazione delle equazioni alle maglie, ma anche per il calcolo dei potenziali nei vari punti del circuito.

Metodo di Kirchhoff

Come già detto per risolvere un circuito si imposta un sistema di tante equazioni quante sono le grandezze da calcolare.

Di solito(*) le grandezze **incognite** sono:

- le correnti nei rami (*esclusi quelli che contengono il generatore di corrente*)
- le tensioni ai capi dei generatori di corrente (*occorre tenerne conto per impostare correttamente le equazioni*)

Mentre sono note:

- le differenze di potenziale dei generatori di tensione
- le correnti imposte dai generatori di corrente
- i valori delle resistenze

(*)In casi particolari è richiesto il calcolo delle caratteristiche di un componente (*ad esempio una resistenza*) affinché il circuito si comporti in un certo modo.

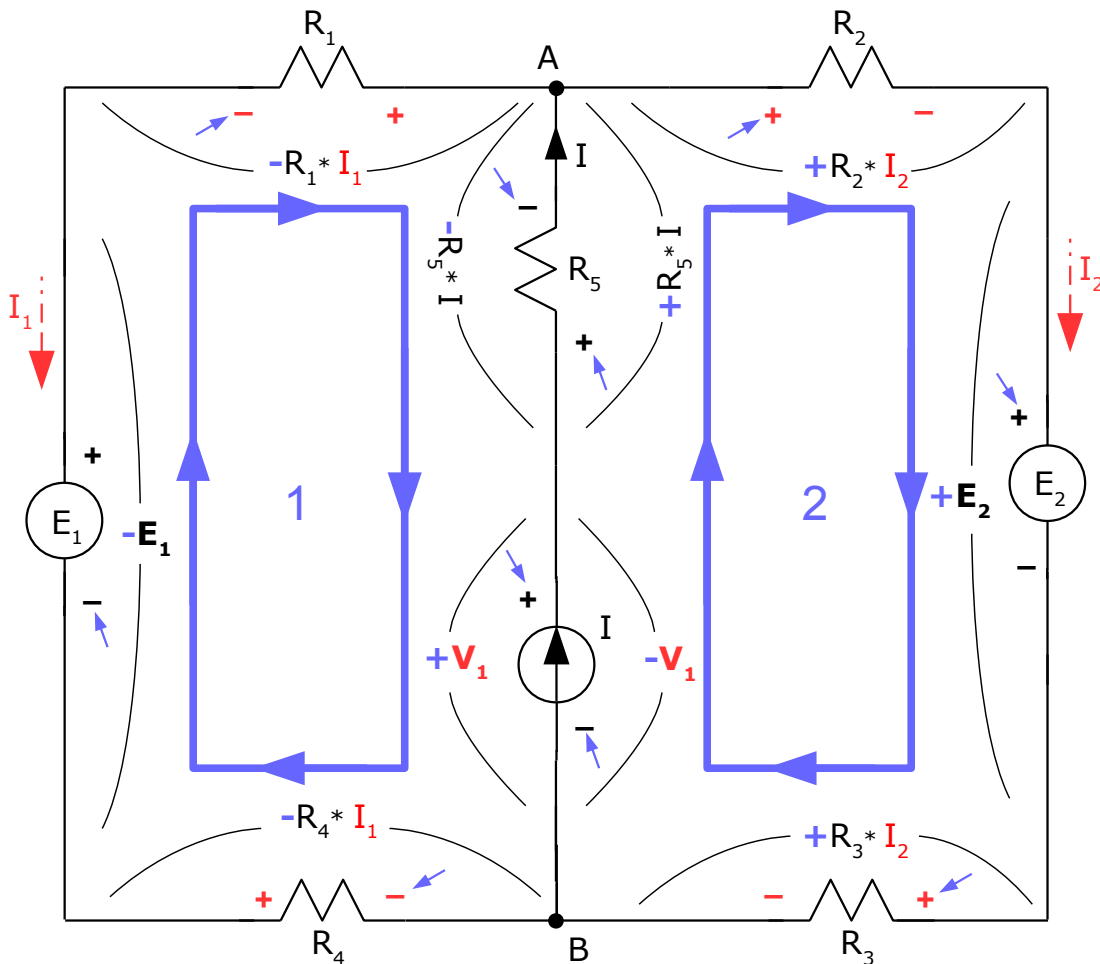
Principali passaggi

- Normalmente si parte dalle equazioni alle maglie, applicando il 2° principio di Kirchhoff.
- Per la corrente di ciascun ramo (*dove non c'è il generatore di corrente*) si stabilisce un verso arbitrario; in base ai versi delle correnti si assegna la polarità ai resistori.
- La polarità dei generatori di corrente si stabilisce a piacere, mentre per i generatori di tensione è data.
- Per scrivere correttamente le equazioni si immagina di percorrere ciascuna maglia secondo un verso di riferimento. Nell' esempio di seguito si è scelto il senso orario per entrambe le maglie. La caduta di tensione su ciascun componente va presa col segno positivo o negativo in base alla polarità con cui il componente viene incontrato.

In pratica la caduta di tensione su un resistore viene presa con segno positivo se il verso ipotizzato o imposto della corrente che lo attraversa è concorde al verso di riferimento (*la polarità con cui il resistore viene incontrato è legata al verso della corrente*).

Per i generatori si considera la polarità e non il verso della corrente. Se percorrendo la maglia il generatore viene incontrato con polarità positiva la sua caduta di tensione viene presa con segno positivo.

- Se necessario si completa il sistema con le equazioni ai nodi, applicando il 1° principio di Kirchhoff.
- Una volta risolto il sistema le correnti che risultano eventualmente negative avranno il verso reale opposto a quello ipotizzato.
- Allo stesso modo, se la tensione ai capi di un generatore di corrente è negativa, la sua effettiva polarità sarà opposta rispetto a quella stabilita.
- Note le correnti è possibile determinare i potenziali nei vari punti del circuito.



$$E_1 = 12V$$

$$E_2 = 24V$$

$$I = 2A$$

$$R_1 = R_2 = 100\Omega$$

$$R_3 = R_4 = 200\Omega$$

$$R_5 = 50\Omega$$

Incognite: $V_1; I_1; I_2$

Equazione alla maglia 1:

$$V_1 - R_4 I_1 - E_1 - R_1 I_1 - R_5 I = 0$$

Equazione alla maglia 2:

$$R_5 I + R_2 I_2 + E_2 + R_3 I_2 - V_1 = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} V_1 - R_4 I_1 - E_1 - R_1 I_1 - R_5 I = 0 \\ R_5 I + R_2 I_2 + E_2 + R_3 I_2 - V_1 = 0 \\ I_1 = I - I_2 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} V_1 - 200I_1 - 12 - 100I_1 - 50 \cdot 2 = 0 \\ 50 \cdot 2 + 100I_2 + 24 + 200I_2 - V_1 = 0 \\ I_1 = 2 - I_2 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} V_1 - 200(2 - I_2) - 12 - 100(2 - I_2) - 100 = 0 \\ 100 + 100I_2 + 24 + 200I_2 - V_1 = 0 \\ I_1 = 2 - I_2 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} V_1 - 400 + 200I_2 - 12 - 200 + 100I_2 - 100 = 0 \\ 300I_2 + 124 - V_1 = 0 \\ I_1 = 2 - I_2 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} V_1 = 712 - 300I_2 \\ 300I_2 + 124 - 712 + 300I_2 = 0 \\ I_1 = 2 - I_2 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} V_1 = 712 - 300I_2 \\ 600I_2 = 588 \\ I_1 = 2 - I_2 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} V_1 = 712 - 300I_2 \\ I_2 = \frac{588}{600} = 0,98A \\ I_1 = 2 - 0,98 = 1,02A \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} V_1 = 712 - 300 \cdot 0,98 = 418V \\ I_2 = 0,98A \\ I_1 = 1,02A \end{array} \right.$$

In questo caso i versi reali delle correnti (*quindi le polarità dei resistori*) corrispondono a quelli che avevamo ipotizzato.

A questo punto non rimane che calcolare i potenziali nei vari punti del circuito, applicando la legge di Ohm e tenendo presente che il polo positivo di ciascun componente è a potenziale più alto.

Si stabilisce un punto di riferimento a potenziale 0, ad esempio il polo negativo del generatore E_1 .

Applicando la legge di Ohm avremo:

$$V_{R1} = I_1 \cdot R_1 = 102 \text{ Volt}$$

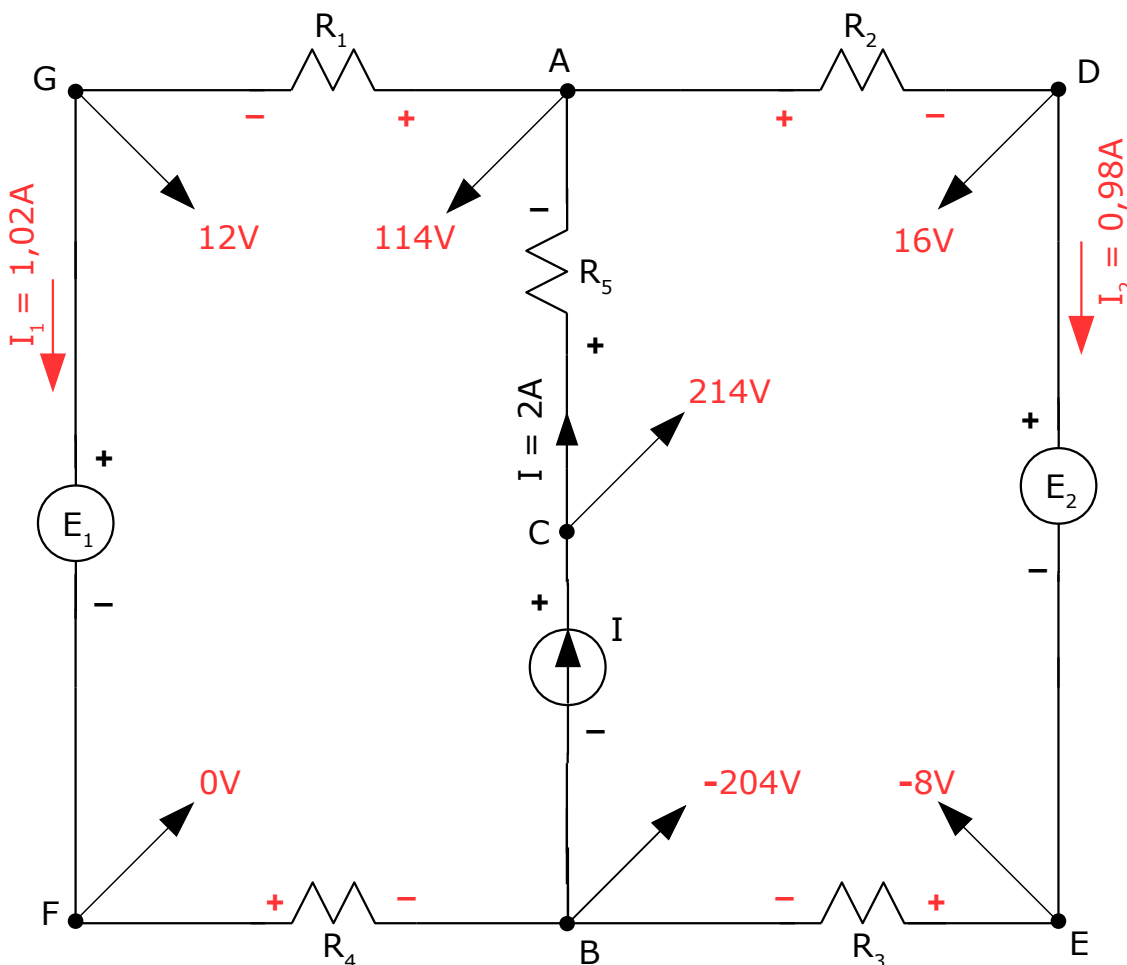
Dato che avevamo stabilito a potenziale 0 il polo negativo del generatore E_1 , il suo polo positivo, quindi il punto G, sarà a potenziale +12.

V_{R1} è praticamente la variazione di potenziale tra i punti G ed A e quest'ultimo è a potenziale più alto.

Di conseguenza:

$$V_A = V_G + V_{R1} = 12 + 102 = 114 \text{ Volt}$$

Con lo stesso criterio si calcolano tutti gli altri valori.



Metodo di Maxwell

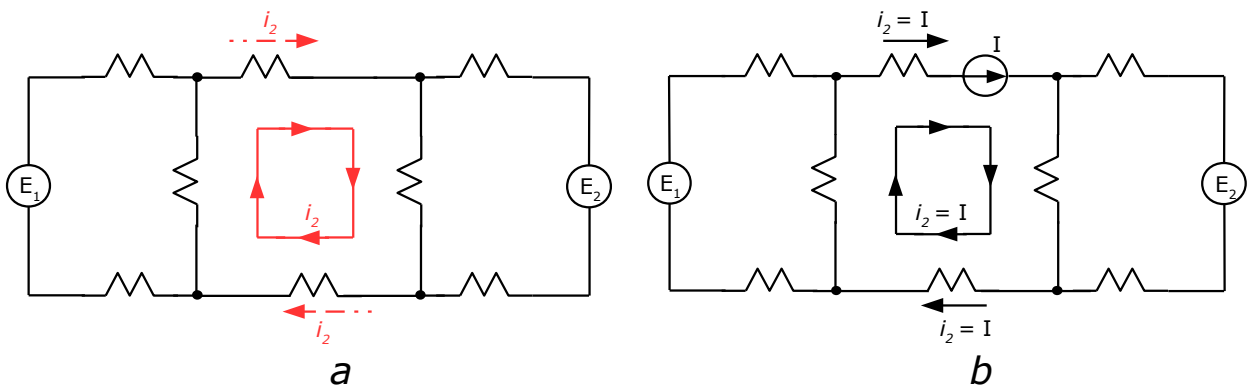
Per semplificare i calcoli si imposta un sistema di equazioni alle maglie che ci permette di calcolare le correnti sui rami esterni del circuito. Di conseguenza non occorre completare il sistema con le equazioni ai nodi, salvo il caso in cui ci sia un generatore di corrente in un ramo condiviso.

Una volta note le correnti nei rami esterni si applica il 1° principio di Kirchhoff e si calcolano tutte le altre correnti.

Principali passaggi

- Per ciascuna maglia si stabilisce una corrente di circolazione **fittizia** i_n , che determina il verso di riferimento.
- Il verso della corrente di circolazione di una maglia si stabilisce **a piacere** (figura a), salvo il caso in cui un suo ramo **esterno** contenga un generatore di corrente (figura b).

In pratica la corrente di circolazione di una maglia corrisponde alle correnti (sempre di uguale valore) ipotizzate o imposte nei suoi rami esterni.



- Le correnti **incognite** che, una volta risolto il sistema, risultano negative avranno il verso reale opposto rispetto a quello ipotizzato.
- Per scrivere le equazioni si immagina di percorrere ciascuna maglia nel verso di riferimento stabilito o imposto per la sua corrente di circolazione.
- Per le cadute di tensione sui generatori vale la regola già vista.
- Le resistenze sui rami esterni vanno semplicemente moltiplicate per la corrente di circolazione della maglia considerata, con segno sempre positivo. Come abbiamo visto la corrente di circolazione di una maglia (in pratica il verso di riferimento) coincide con le correnti nei suoi rami esterni. Di conseguenza i resistori verranno sempre incontrati con polarità positiva.

➤ Le resistenze sui rami condivisi, sempre con segno positivo, vanno moltiplicate per la somma o la differenza (*a seconda del verso concorde o discorde*) tra la corrente di circolazione della maglia considerata e quella della maglia con cui il ramo è condiviso.

Per le correnti nei rami condivisi non viene fissato il verso in quanto tali correnti vengono prese in considerazione solo successivamente.

Nel circuito della figura c si è stabilito il senso orario per entrambe le maglie. Di conseguenza le due correnti di circolazione avranno verso discorde rispetto al ramo condiviso. Quindi la resistenza R_2 andrà moltiplicata per la differenza tra la corrente di circolazione della maglia considerata e quella dell' altra maglia.

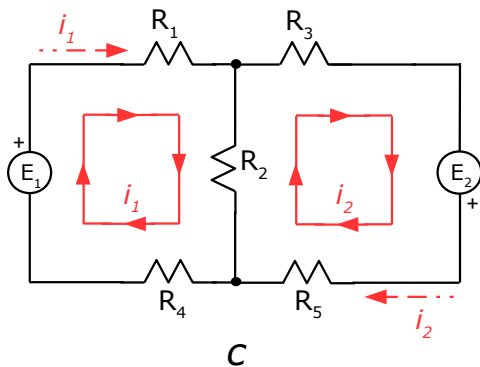
Nella figura d le due correnti di circolazione hanno verso concorde rispetto al ramo condiviso, quindi la resistenza R_2 andrà moltiplicata per la loro somma.

Maglia i_1 :

$$-E_1 + R_1 \cdot i_1 + R_2 \cdot (i_1 - i_2) + R_4 \cdot i_1 = 0$$

Maglia i_2 :

$$-E_2 + R_5 \cdot i_2 + R_2 \cdot (i_2 - i_1) + R_3 \cdot i_2 = 0$$

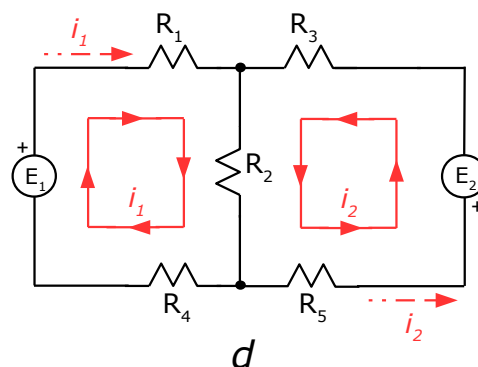


Maglia i_1 :

$$-E_1 + R_1 \cdot i_1 + R_2 \cdot (i_1 + i_2) + R_4 \cdot i_1 = 0$$

Maglia i_2 :

$$E_2 + R_3 \cdot i_2 + R_2 \cdot (i_2 + i_1) + R_5 \cdot i_2 = 0$$

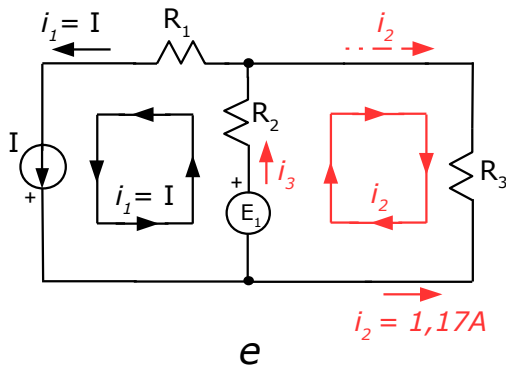


➤ Se un ramo **esterno** di una maglia contiene il generatore di corrente (*figura e*) l'equazione relativa a quella maglia non si scrive, in quanto la sua corrente è già nota. Per le equazioni relative alle altre maglie si procede col criterio già visto, sostituendo l' incognita col valore noto.

Nell' equazione al nodo si prende in considerazione il verso reale di i_2 , quindi il valore diventa positivo.

$$E_1 = 24V \quad I = 2A$$

$$R_1 = R_2 = 100\Omega \quad R_3 = 50\Omega$$



Equazione alla maglia:

$$\begin{cases} i_1 = I \\ R_2 \cdot (i_2 + i_1) + R_3 \cdot i_2 - E_1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} i_1 = 2 \\ 100 \cdot (i_2 + 2) + 50 \cdot i_2 - 24 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} i_1 = 2A \\ i_2 = -1,17A \end{cases}$$

Equazione al nodo:

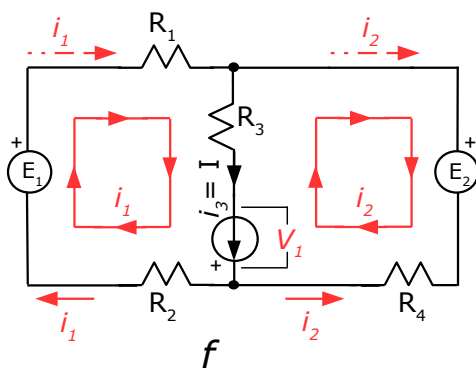
$$\begin{cases} i_1 = 2A \\ i_2 = 1,17A \\ i_3 = 2 - 1,17 = 0,83A \end{cases}$$

➤ Se un ramo **condiviso** contiene il generatore di corrente (*figura f*), per le equazioni alle maglie si procede col criterio già visto, senza tener conto della corrente imposta. Occorre invece considerare la caduta di tensione sul generatore di corrente, che è incognita. Di conseguenza si completa il sistema con l'equazione al nodo che mette in relazione la corrente imposta con le correnti incognite nei rami esterni.

Nelle equazioni alle maglie le resistenze sui rami condivisi vanno sempre moltiplicate per la somma o la differenza tra le correnti di circolazione delle maglie interessate, anche quando nel ramo condiviso scorre una corrente imposta.

$$E_1 = 12V \quad E_2 = 24V \quad I = i_3 = 2A$$

$$R_1 = R_2 = 100\Omega \quad R_3 = R_4 = 200\Omega$$

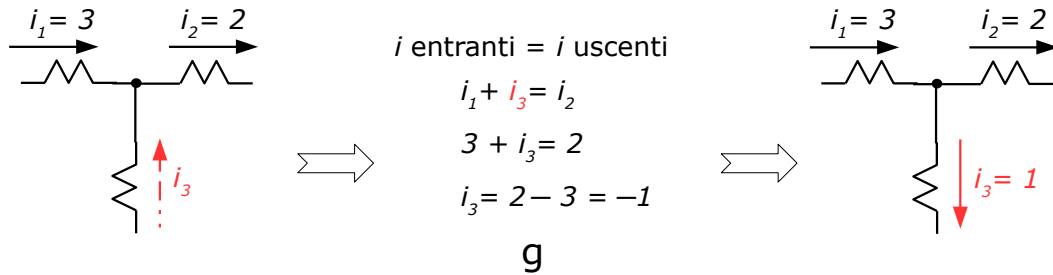


$$\begin{cases} R_1 \cdot i_1 + R_3 \cdot (i_1 - i_2) - V_1 + R_2 \cdot i_1 - E_1 = 0 \text{ (maglia } i_1) \\ R_4 \cdot i_2 + V_1 + R_3 \cdot (i_2 - i_1) + E_2 = 0 \text{ (maglia } i_2) \\ i_2 = i_1 - i_3 \end{cases}$$

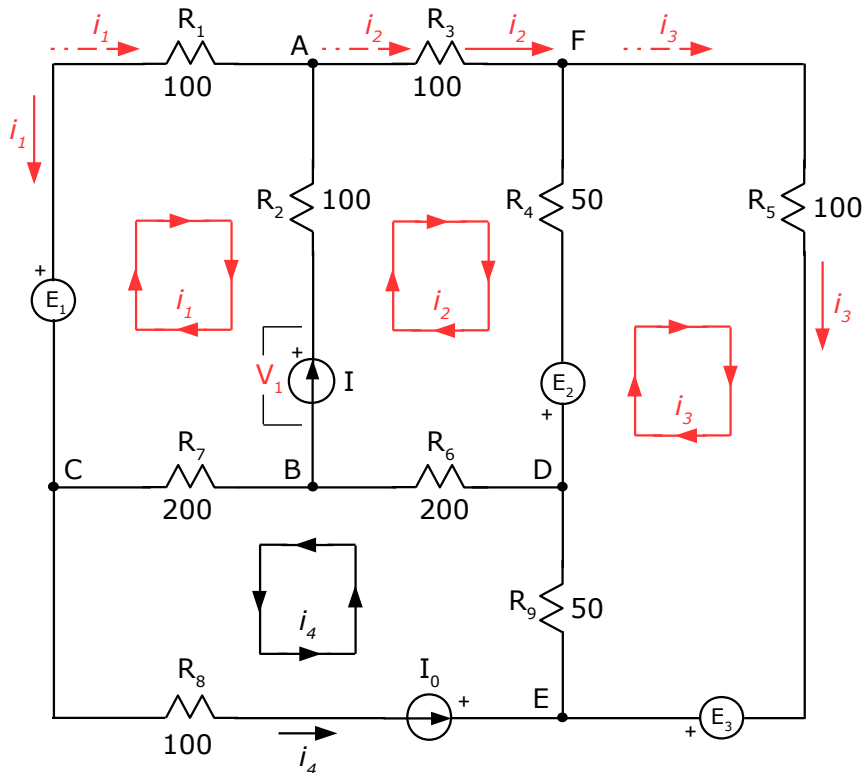
$$\begin{cases} 100 \cdot i_1 + 200 \cdot (i_1 - i_2) - V_1 + 100 \cdot i_1 - 12 = 0 \\ 200 \cdot i_2 + V_1 + 200 \cdot (i_2 - i_1) + 24 = 0 \\ i_2 = i_1 - 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} i_1 = 0,97A \\ i_2 = -1,03A \\ V_1 = 582V \end{cases}$$

➤ Per le equazioni ai nodi si applica il 1° principio di Kirchhoff, assegnando un verso arbitrario alle correnti incognite: se il valore risulta negativo il verso reale sarà opposto (*figura g*).



Esempio pratico



$E_1 = 24V$
 $E_2 = 12V$
 $E_3 = 50V$
 $I = 2A$
 $I_0 = 1A$

$$\begin{cases}
 R_1 \cdot i_1 + R_2 \cdot (i_1 - i_2) + V_1 + R_7 \cdot (i_1 + i_4) - E_1 = 0 & (\text{maglia } i_1) \\
 R_2 \cdot (i_2 - i_1) + R_3 \cdot i_2 + R_4 \cdot (i_2 - i_3) - E_2 + R_6 \cdot (i_2 + i_4) - V_1 = 0 & (\text{maglia } i_2) \\
 R_4 \cdot (i_3 - i_2) + R_5 \cdot i_3 - E_3 + R_9 \cdot (i_3 + i_4) + E_2 = 0 & (\text{maglia } i_3) \\
 i_4 = I_0 & (\text{maglia } i_4) \\
 i_2 = I + i_1 & (\text{nodo A})
 \end{cases}$$

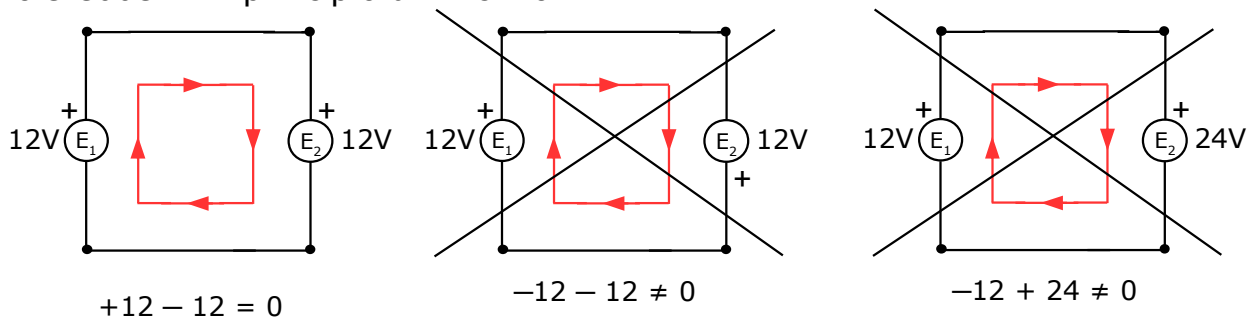
$$\begin{cases}
 100 \cdot i_1 + 100 \cdot (i_1 - i_2) + V_1 + 200 \cdot (i_1 + 1) - 24 = 0 \\
 100 \cdot (i_2 - i_1) + 100 \cdot i_2 + 50 \cdot (i_2 - i_3) - 12 + 200 \cdot (i_2 + 1) - V_1 = 0 \\
 50 \cdot (i_3 - i_2) + 100 \cdot i_3 - 50 + 50 \cdot (i_3 + 1) + 12 = 0 \\
 i_4 = 1 \\
 i_2 = 2 + i_1
 \end{cases}
 \begin{cases}
 i_1 = -1,63A \\
 i_2 = 0,366A \\
 i_3 = 0,0313A \\
 i_4 = 1A \\
 V_1 = 466,2 \text{ Volt}
 \end{cases}$$

Il circuito qui sopra è formato da 4 maglie e 9 rami. I resistori $R_1 - R_3 - R_5 - R_8$ si trovano nei rami esterni, appartenenti rispettivamente alle maglie $i_1 - i_2 - i_3 - i_4$. Il ramo che contiene R_2 è condiviso tra le maglie i_1 e i_2 . Il ramo che contiene R_4 è condiviso tra le maglie i_2 e i_3 . La maglia i_4 condivide il resistore R_7 con la maglia i_1 , R_6 con la maglia i_2 ed R_9 con la maglia i_3 . I versi di circolazione delle maglie $i_1 - i_2 - i_3$ sono stati stabiliti a piacere: in pratica corrispondono ai versi ipotizzati delle correnti che scorrono nei rami esterni di queste tre maglie. Per la maglia i_4 il verso di circolazione è imposto dal generatore I_0 .

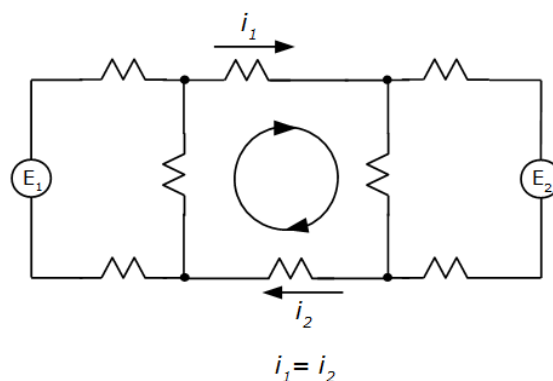
Una volta determinati i valori ed i versi delle correnti nei rami esterni si calcolano le altre correnti applicando il 1° principio di Kirchhoff.

Regole generali

➤ Il collegamento diretto fra due generatori di tensione è ammesso solo se la somma algebrica delle cadute di tensione è nulla: in caso contrario violerebbe il 2° principio di Kirchhoff.



➤ Le correnti che scorrono nei rami esterni di una stessa maglia hanno uguale valore e verso concorde, ovvero seguono lo stesso senso di circolazione.



➤ Due generatori di corrente direttamente in serie, oppure nei rami esterni di una stessa maglia, sono ammessi solo se hanno stesso valore e verso concorde.

In pratica, inserendo un generatore di corrente in un ramo esterno, si impone la corrente in tutti i rami esterni della stessa maglia (vedi figura b a pagina 8).