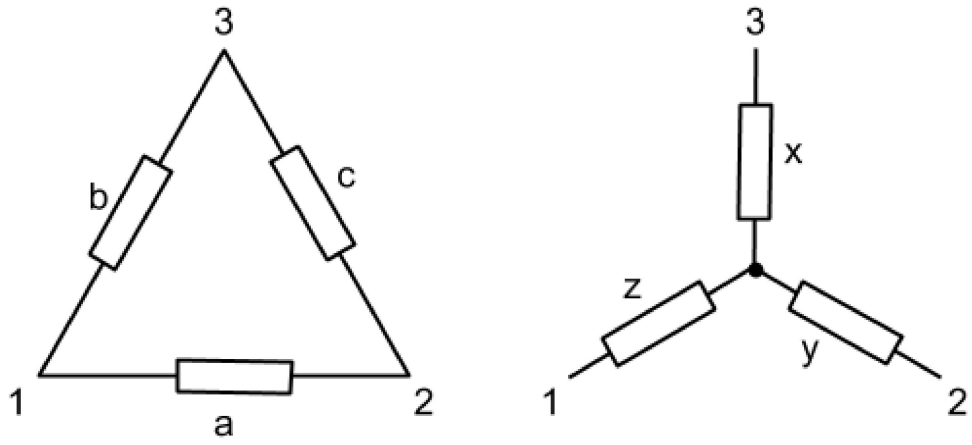
RISOLUZIONE DELLE RETI ELETTRICHE CON IL METODO DELL' EQUIVALENZA STELLA-TRIANGOLO

La trasformazione stella-triangolo è utile per semplificare i circuiti che non si possono direttamente risolvere con l' equivalenza serie-parallelo.



Una stella ed un triangolo sono equivalenti quando si verificano queste condizioni:

$\frac{a*(b+c)}{a+b+c} = z + y$ resistenza vista tra i punti 1 e 2

$\frac{c*(a+b)}{a+b+c} = x + y$ resistenza vista tra i punti 2 e 3

$\frac{b*(a+c)}{a+b+c} = z + x$ resistenza vista tra i punti 1 e 3

$$\frac{ab}{a+b+c} + \frac{ac}{a+b+c} = z + y \qquad z = \frac{ab}{a+b+c} \quad (1)$$

$$\Rightarrow$$

$$\frac{ac}{a+b+c} + \frac{bc}{a+b+c} = x + y \qquad y = \frac{ac}{a+b+c} \quad (2)$$

$$\Rightarrow$$

$$\frac{ab}{a+b+c} + \frac{bc}{a+b+c} = z + x \qquad x = \frac{bc}{a+b+c} \quad (3)$$

Le equazioni appena scritte ci permettono di trasformare un triangolo in stella.

Partendo da queste equazioni isoliamo l' espressione $(a+b+c)$ e ricaviamo così le ugualianze qui sotto, che nei passaggi successivi ci permetteranno di sostituire a,b,c con x,y,z

$$\frac{ab}{z}=\frac{ac}{y}=\frac{bc}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{y}{z}=\frac{c}{b} \; ; \; \frac{x}{y}=\frac{b}{a} \; ; \; \frac{x}{z}=\frac{c}{a}$$

(1) $a=\frac{z*(a+b+c)}{b}=\frac{az}{b}+\frac{bz}{b}+\frac{cz}{b}=\frac{yz}{x}+z+\frac{yz}{z} \qquad a=\frac{yz}{x}+z+y$

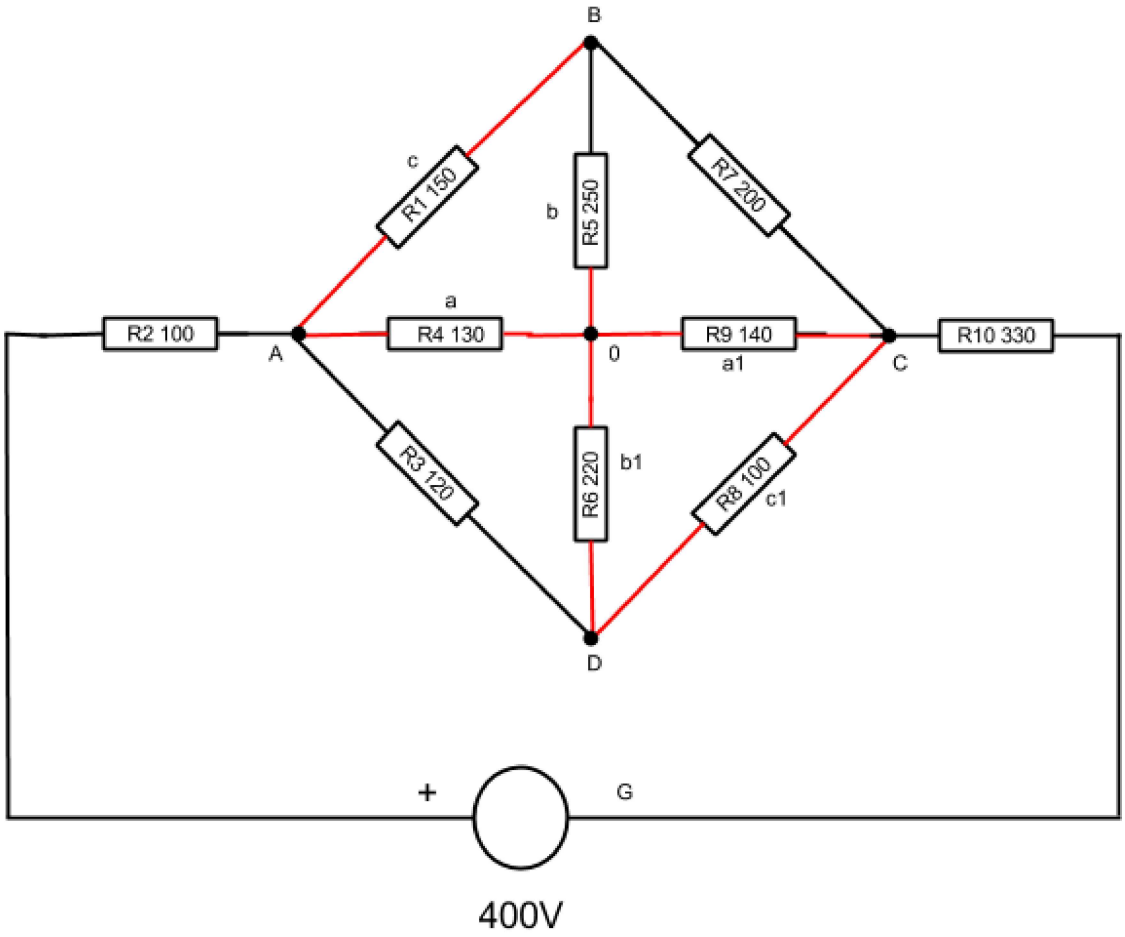
(2) $c=\frac{y*(a+b+c)}{a}=\frac{ay}{a}+\frac{by}{a}+\frac{cy}{a}=y+\frac{xy}{y}+\frac{xy}{z} \qquad c=y+x+\frac{xy}{z}$

(3) $b=\frac{x*(a+b+c)}{c}=\frac{ax}{c}+\frac{bx}{c}+\frac{cx}{c}=\frac{xz}{x}+\frac{xz}{y}+x \qquad b=z+\frac{xz}{y}+x$

Abbiamo quindi trovato le equazioni che ci permettono di trasformare una stella in triangolo, anche se solitamente viene utilizzata la trasformazione inversa.

Una volta semplificata la rete si iniziano a calcolare i valori di tensione e corrente. Alcuni di questi sono solo fittizi, ma ci permetteranno di risalire ai valori reali presenti nel circuito dato, come vedremo nell' esempio di seguito.

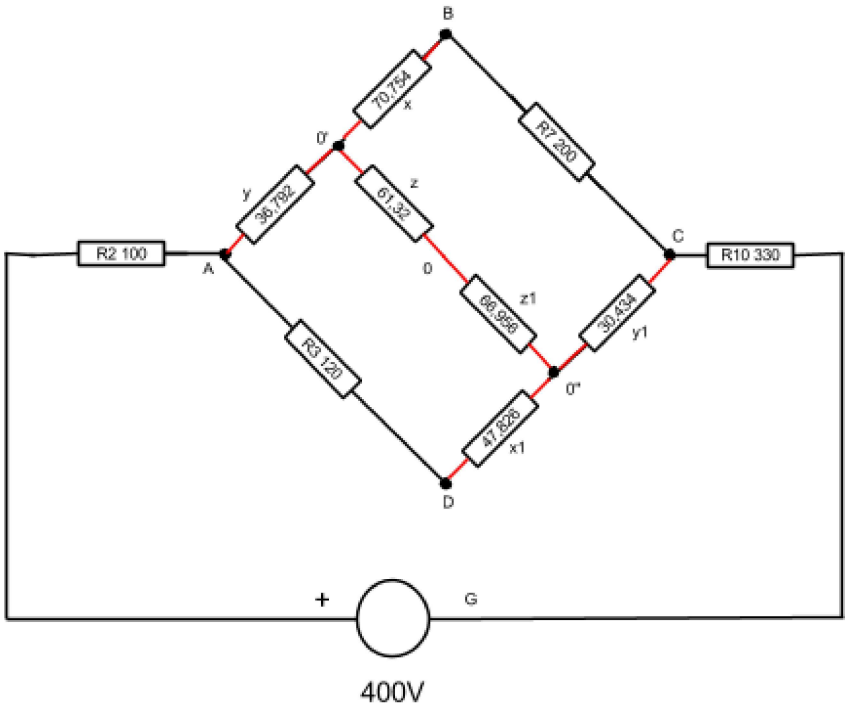
Esempio pratico

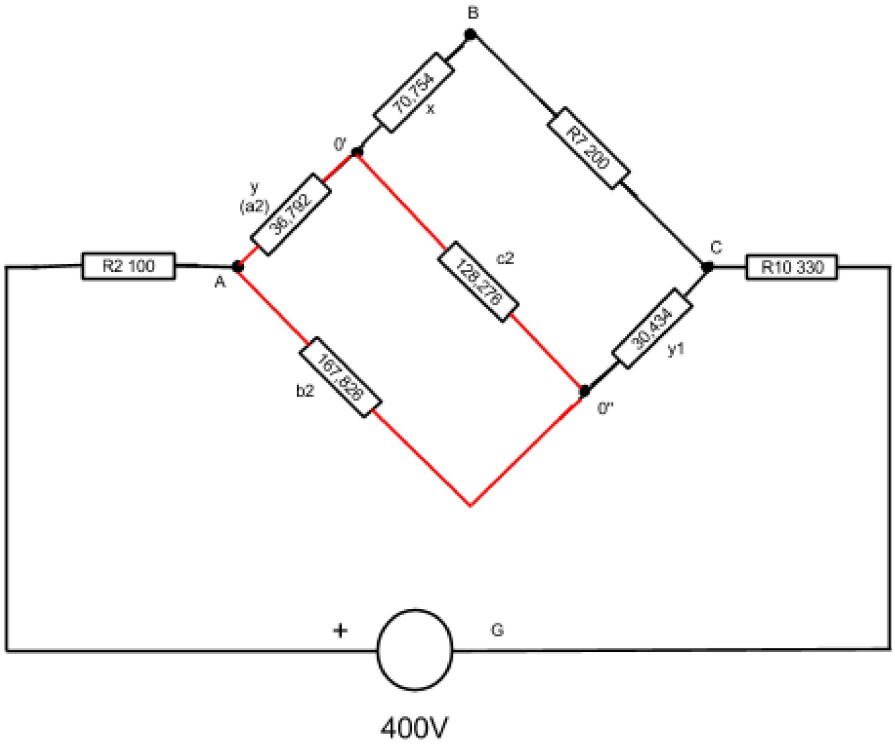


Trasformando in stella il triangolo 0AB ed il triangolo 0CD otteniamo:

$$x = \frac{bc}{a+b+c} = \frac{150*250}{530} = 70,754\Omega \qquad x_1 = \frac{b1c1}{a1+b1+c1} = \frac{220*100}{460} = 47,826\Omega$$
$$y = \frac{ac}{a+b+c} = \frac{130*150}{530} = 36,792\Omega \qquad y_1 = \frac{a1c1}{a1+b1+c1} = \frac{140*100}{460} = 30,434\Omega$$
$$z = \frac{ab}{a+b+c} = \frac{130*250}{530} = 61,32\Omega \qquad z_1 = \frac{a1b1}{a1+b1+c1} = \frac{220*140}{460} = 66,956\Omega$$

Quindi la rete diventa così:

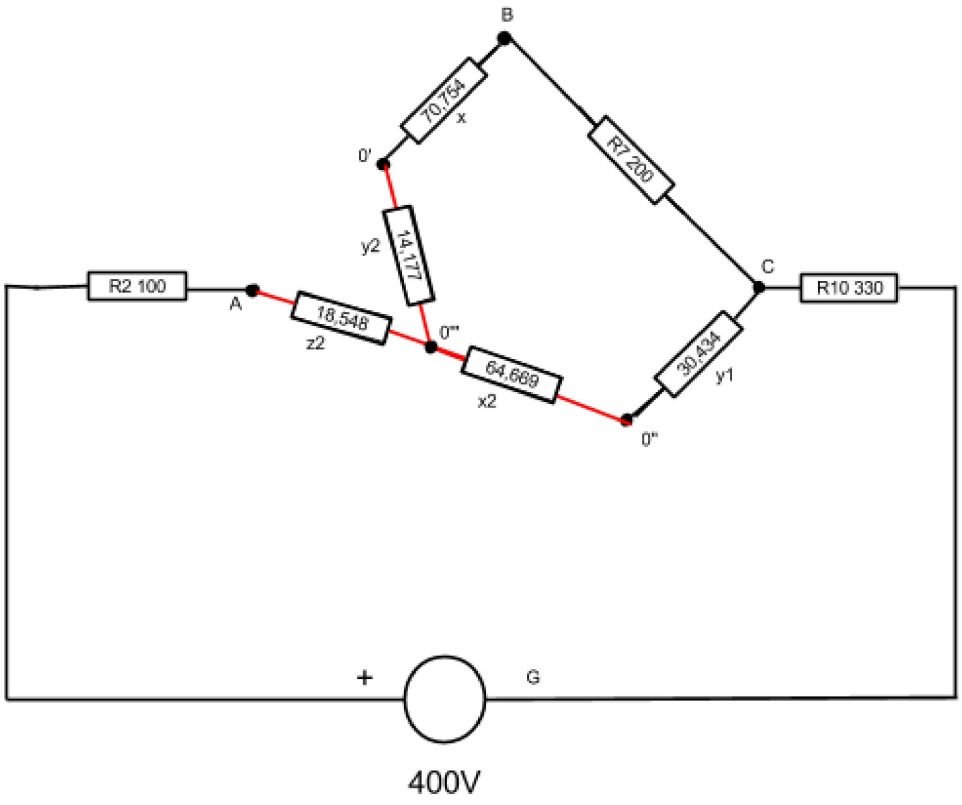

B
70,754
x
R7 200
0'
y
36,792
z
61,32
C
R2 100
A
0
R10 330
66,956
z1
39,434
y1
R3 120
0"
47,826
x1
D
+
G
400V


B
70,754
x
R7 200
0'
y
(a2)
36,792
c2
129,276
C
R2 100
A
R10 330
30,434
y1
167,826
b2
0"
+
G
400V

Trasformiamo in stella il triangolo A0'0"

$$x_2 = \frac{b2c2}{a2+b2+c2} = \frac{128,276*167,826}{332,894} = 64,669\Omega$$
$$y_2 = \frac{a2c2}{a2+b2+c2} = \frac{36,792*128,276}{332,894} = 14,177\Omega$$
$$z_2 = \frac{a2b2}{a2+b2+c2} = \frac{36,792*167,826}{332,894} = 18,548\Omega$$

Otteniamo così una rete che possiamo iniziare a risolvere con l' equivalenza serie-parallelo.



$$R_{0'''BC} = 14,177 + 70,754 + 200 = 284,931\Omega$$
$$R_{0'''0''C} = 64,669 + 30,434 = 95,103\Omega$$
$$R_{PAR} = \frac{284,931*95,103}{284,931+95,103} = 71,304\Omega$$
$$R_{TOT} = 71,304 + 18,548 + 100 + 330 = 519,852\Omega$$
$$I = \frac{V}{R_{TOT}} = \frac{400}{519,852} = 0,769A$$

Abbiamo appena trovato la corrente che circola nella maglia principale, quindi nel generatore.

Alcuni dei valori che calcoliamo sono solo fittizi, ma ci serviranno per risalire alle tensioni e correnti reali presenti nel circuito dato.

$I_{0'''BC} = I_7 = \frac{0,769*95,103}{284,931+95,103} = 0,192A$

$I_{0'''0''C} = \frac{0,769*284,931}{284,931+95,103} = 0,576A$

$V_{+A} = 0,769 * 100 = 76,9V \Rightarrow V_A = 323,1V$

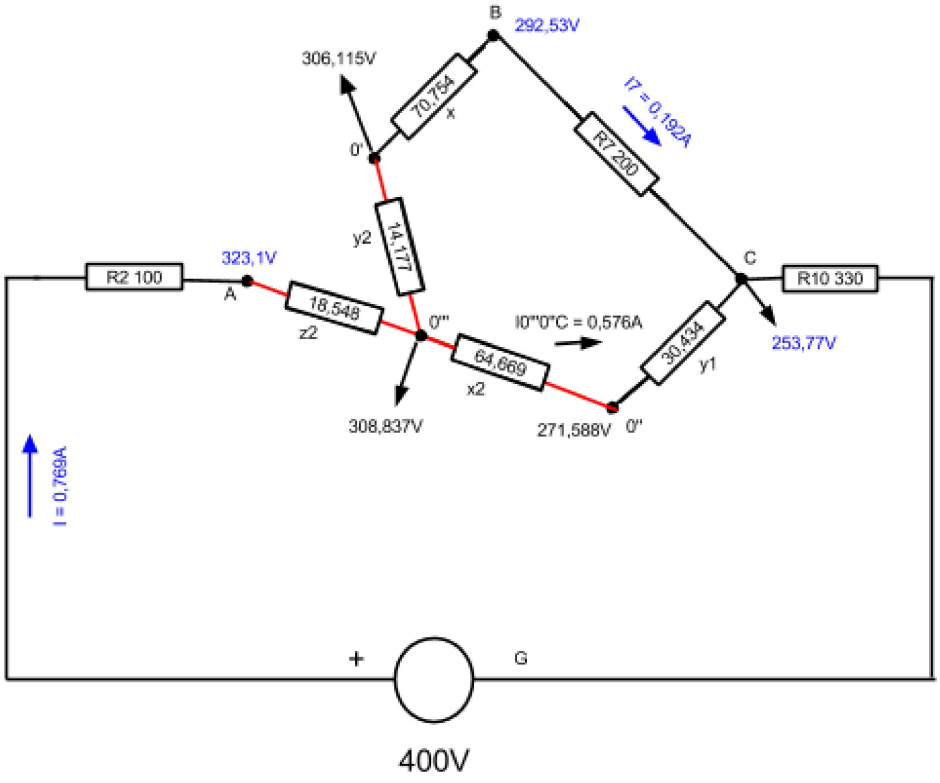
$V_{CG} = 0,769 * 330 = 253,77 \Rightarrow V_C = 253,77V$

$V_{A0'''} = 0,769 * 18,548 = 14,263V \Rightarrow V_{0'''} = 308,837V$

$V_{0'''0'} = 0,192 * 14,177 = 2,722V \Rightarrow V_{0'} = 306,115V$

$V_{0'B} = 0,192 * 70,754 = 13,585V \Rightarrow V_B = 292,53V$

$V_{0'''0''} = 0,576 * 64,669 = 37,249V \Rightarrow V_{0''} = 271,588V$



$V_{0'0''} = 34,527V \qquad V_{A0''} = 51,512V \qquad I_{0'00''} = \frac{34,527}{61,32+66,956} = 0,269A$

$V_{0'0} = 0,269 * 61,32 = 16,495V \Rightarrow V_0 = 289,62V$

$I_{AD0''} = I_3 = \frac{51,512}{120+47,826} = 0,307A \qquad V_{AD} = 0,307 * 120 = 36,84V$

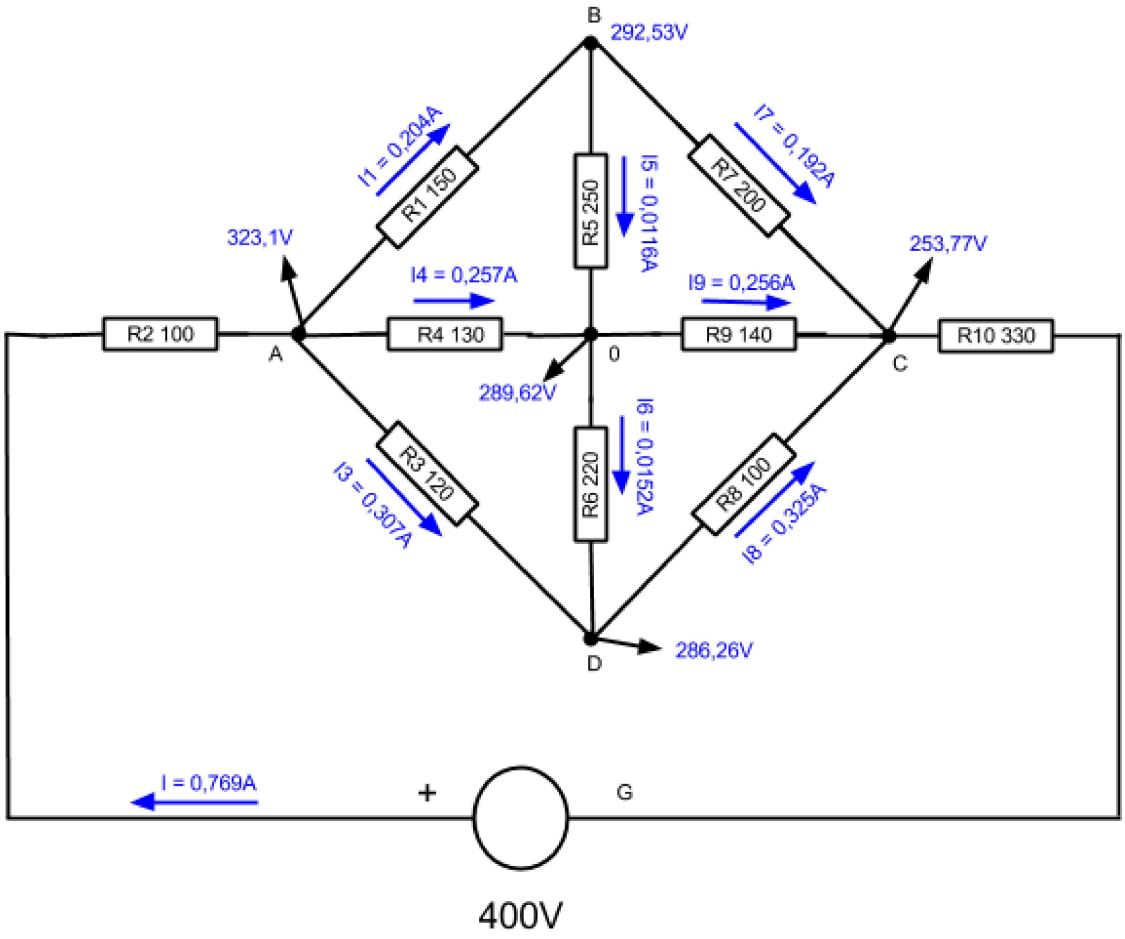
$V_D = 286,26V$

A questo punto conosciamo tutti i potenziali ai nodi della rete, quindi possiamo ricavare le correnti

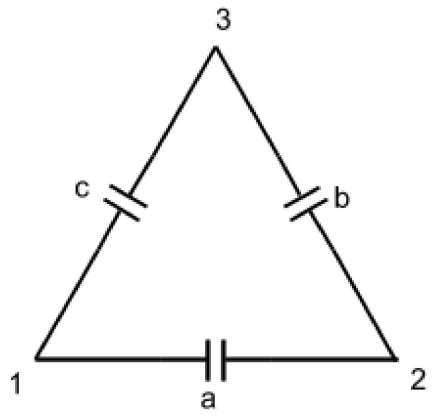
$$V_{B0} = 292,53 - 289,62 = 2,91V \quad I_5 = \frac{V_{B0}}{R_5} = \frac{2,91}{250} = 0,0116A$$

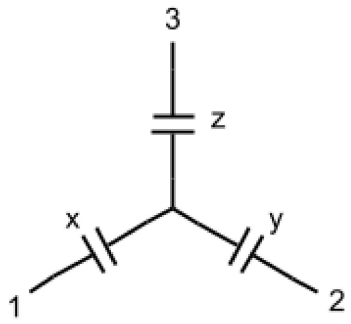
La corrente scorre verso il nodo con poteziale più basso, quindi il nodo 0.

Con lo stesso criterio calcoleremo le altre correnti, eccetto I_3 ed I_7 che avevamo già calcolato.



Equivalenza stella triangolo applicata ai condensatori





Un triangolo ed una stella sono equivalenti quando si verificano le seguenti condizioni:

$$\frac{c*b}{c+b} + a = \frac{x*y}{x+y} \quad \Rightarrow \frac{bc+ab+ac}{c+b} = \frac{xy}{x+y} \qquad (1)$$

(capacità vista tra i punti 1 e 2)

$$\frac{a*c}{a+c} + b = \frac{y*z}{y+z} \quad \Rightarrow \frac{bc+ab+ac}{a+c} = \frac{yz}{y+z} \qquad (2)$$

(capacità vista tra i punti 2 e 3)

$$\frac{a*b}{a+b} + c = \frac{z*x}{z+x} \quad \Rightarrow \frac{bc+ab+ac}{a+b} = \frac{zx}{z+x} \ (3\ )$$

(capacità vista tra i punti 1 e 3)

$$\frac{c+b}{bc+ab+ac} = \frac{x+y}{xy} = \frac{x}{xy} + \frac{y}{xy} = \frac{1}{y} + \frac{1}{x} \qquad (1)$$

$$\frac{a+c}{bc+ab+ac} = \frac{1}{z} + \frac{1}{y} \quad (2)$$

$$\frac{a+b}{bc+ab+ac} = \frac{1}{x} + \frac{1}{z} \quad (3)$$

$$\frac{1}{y} = \frac{c+b}{bc+ab+ac} - \frac{1}{x} \quad (1) \qquad \frac{1}{y} = \frac{a+c}{bc+ab+ac} - \frac{1}{z} \quad (2)$$

$$(3)\ \frac{1}{z} = \frac{a+b}{bc+ab+ac} - \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{1}{y} = \frac{a+c}{bc+ab+ac} - \frac{a+b}{bc+ab+ac} + \frac{1}{x} \quad (2)\ (3)$$

$$(1)\ \frac{c+b}{bc+ab+ac} - \frac{1}{x} = \frac{a+c}{bc+ab+ac} - \frac{a+b}{bc+ab+ac} + \frac{1}{x}\ (2)\ (3)$$

$$\frac{c+b}{bc+ab+ac} - \frac{a+c}{bc+ab+ac} + \frac{a+b}{bc+ab+ac} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x}$$

$$\frac{c+b-a-c+a+b}{bc+ab+ac} = \frac{2}{x}$$

$$\frac{2b}{bc+ab+ac} = \frac{2}{x} \Rightarrow \quad \frac{bc+ab+ac}{2b} = \frac{x}{2}$$

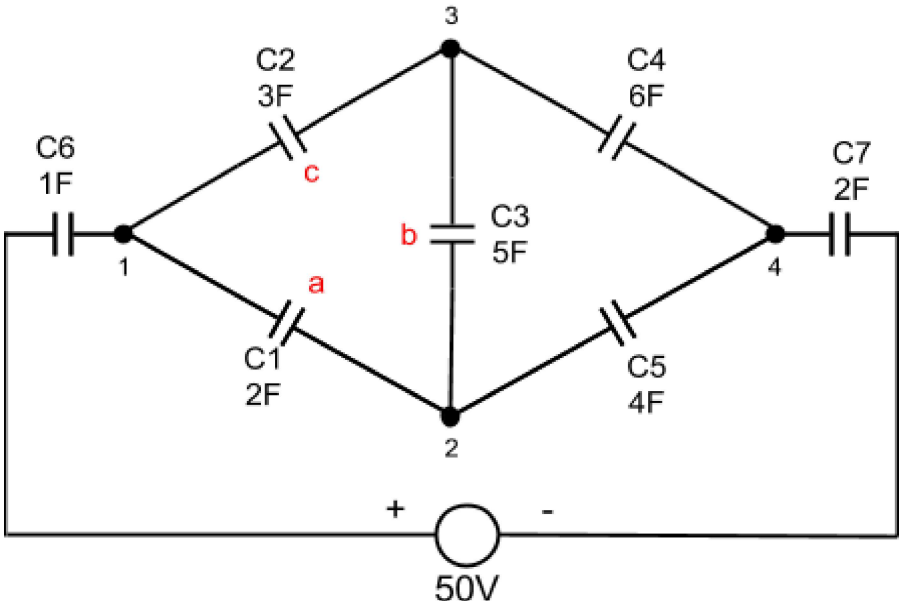
$$\frac{bc+ab+ac}{b} = x$$

$$\frac{bc+ab+ac}{c} = y$$

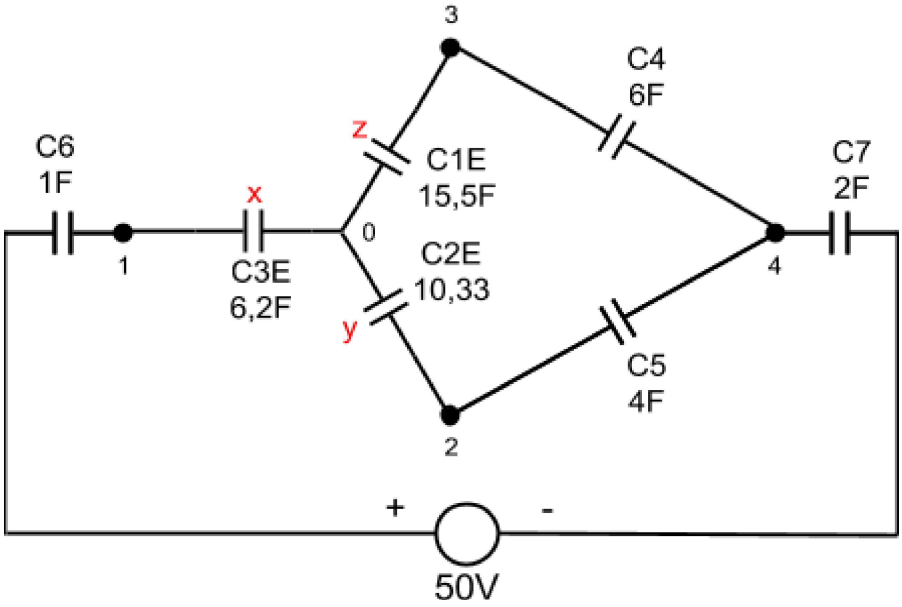
$$\frac{bc+ab+ac}{a} = z$$

ESEMPIO PRATICO

Data la rete qui sotto, supponiamo di dover calcolare i potenziali ai nodi del circuito.
Trasformando in stella il triangolo 1-2-3 semplifichiamo il circuito, in modo da renderlo risolvibile tramite l'equivalenza serie-parallelo.



$$x = \frac{bc+ab+ac}{b} = \frac{15+10+6}{5} = 6,2F$$
$$y = \frac{bc+ab+ac}{c} = \frac{15+10+6}{3} = 10,33F$$
$$z = \frac{bc+ab+ac}{a} = \frac{15+10+6}{2} = 15,5F$$



$$C1E \leftrightarrow C4 = \frac{C1E*C4}{C1E+C4} = \frac{15,5*6}{15,5+6} = 4,33F$$

$$C2E \leftrightarrow C5 = \frac{C2E*C5}{C2E+C5} = \frac{10,33*4}{10,33+4} = 2,88F$$

$$C_{PAR} = 2,88 + 4,33 = 7,21F$$

$$C_{TOT} = \frac{1}{\frac{1}{C_{PAR}}+\frac{1}{C3E}+\frac{1}{C7}+\frac{1}{C6}} = \frac{1}{\frac{1}{7,21}+\frac{1}{6,2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{1}} = 0,56F$$

$$Q_{TOT} = V * C_{TOT} = 50 * 0,56 = 27,78C$$

$$V_{0-4} = \frac{Q_{TOT}}{C_{PAR}} = \frac{27,78}{7,21} = 3,85V$$

$$Q_{0-3-4} = V_{0-4} * C1E \leftrightarrow C4 = 3,85 * 4,33 = 16,68C$$

$$V_{0-3} = \frac{Q_{0-3-4}}{C1E} = \frac{16,68}{15,5} = 1,08V$$

$$Q_{0-2-4} = V_{0-4} * C2E \leftrightarrow C5 = 3,85 * 2,88 = 11,09C$$

$$V_{0-2} = \frac{Q_{0-2-4}}{C2E} = \frac{11,09}{10,33} = 1,07V$$

$$V_{1-0} = \frac{Q_{TOT}}{C3E} = \frac{27,78}{6,2} = 4,48V$$

$$V_{+} - V_{1} = \frac{Q_{TOT}}{C6} = \frac{27,78}{1} = 27,78V$$

$$V_{3-4} = V_{0-4} - V_{0-3} = 3,85 - 1,08 = 2,77V$$

$$V_{2-4} = V_{0-4} - V_{0-2} = 3,85 - 1,07 = 2,78V$$

$$V_{+-1} = 27,78V \quad V_{1-0} = 4,48V \quad V_{0-3} = 1,08V \quad V_{0-2} = 1,07V$$

$$V_{3-4} = 2,77V \quad V_{2-4} = 2,78V \quad V_{+} = 50V$$

$$\Downarrow$$

$$V_{1} = 22,22V \quad V_{3} = 16,66V \quad V_{4} = 13,89V \quad V_{2} = 16,67V$$