Risoluzione dei sistemi di equazioni col metodo delle matrici

Un sistema di ***n* equazion**i ed ***n* incognite** può essere rappresentato come matrice formata dai soli coefficienti.
Dato il sistema:

$$\left| \begin{array}{l} a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z = d_3 \end{array} \right.$$

La sua matrice sarà:

$$\underbrace{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}_{MATRICE\ \ INCOMPLETA\ \ (A)} \begin{matrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{matrix}$$

In questo caso *n=3.*

La matrice formata solamente dai coefficienti delle incognite prende il nome di **matrice incompleta** e verrà indicata con la sigla *A.*
Sostituendo nella matrice incompleta la colonna corrispondente ad un' incognita con la colonna dei termini noti, otteniamo le matrici A_x, A_y, A_z

$$A_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad A_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad A_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

Determinante di una matrice

Il **determinante** di qualsiasi matrice *(che indicheremo con la sigla generica G)* di tipo *n=2* si calcola applicando la seguente regola:

$$G=\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} \qquad \det\ G=g_{11}\cdot g_{22}-\ g_{12}\cdot g_{21}$$

I termini della matrice sono indicati con la sigla g_{ij}, dove *i* definisce la riga, mentre *j* definisce la colonna.

Per le matrici di tipo *n>2* il determinante si ricava moltiplicando ciascun termine di una riga o una colonna scelta a piacere per il proprio **complemento algebrico** e sommando i prodotti ottenuti.

Per calcolare il complemento algebrico di un termine g_{ij} di una matrice *G* si elimina la riga *i* e la colonna *j.* Dalla matrice ottenuta, che chiameremo G_{ij}, si ricava il determinante, che va preso con segno:

- positivo se *(i+j)* è pari
- negativo se *(i+j)* è dispari

Se la matrice G_{ij} è di tipo *n>2* si procede con lo stesso criterio fino ad ottenere *n=2.*

<u>Esempio1</u>

Consideriamo la matrice

$$G=\begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix}$$

e supponiamo di dover calcolare il complemento algebrico del termine g_{23}

Eliminiamo quindi la seconda riga e la terza colonna, ottenendo la matrice

$$G_{23}=\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$

il cui determinante sarà:

$$\det\ G_{23}=3\cdot(-1)-2\cdot 2=-7$$

Dato che $(2+3)$ è dispari, il determinante appena calcolato va preso con segno negativo:
$-(-7)=+7$, che è il complemento algebrico del termine g_{23}.

Esempio 2

Consideriamo la matrice

$$G=\begin{vmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

di cui vogliamo calcolare il determinante

Scegliamo *(a piacere)* la terza colonna, quindi calcoliamo i complementi algebrici dei termini g_{13} , g_{23} , g_{33} .

Eliminando la prima riga e la terza colonna otteniamo la matrice

$$G_{13}=\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$\det G_{13}=-9;$ $(1+3)$ è pari, quindi il complemento algebrico del termine g_{13} sarà: $+(-9)=\mathbf{-9}$

Eliminando la seconda riga e la terza colonna otteniamo la matrice

$$G_{23}=\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$\det G_{23}=-3;$ $(2+3)$ è dispari, quindi il complemento algebrico del termine g_{23} sarà: $-(-3)=\mathbf{+3}$

Eliminando la terza riga e la terza colonna otteniamo la matrice

$$G_{33}=\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$\det G_{33}=12;$ $(3+3)$ è pari, quindi il complemento algebrico del termine g_{33} sarà $+12$

A questo punto, per calcolare il determinante della matrice *G,* moltiplichiamo i termini g_{13} , g_{23} , g_{33} per i rispettivi complementi algebrici e sommiamo i prodotti ottenuti:
$\det G=(-3)(-9)+2\cdot 3+3\cdot 12=\mathbf{69}$

Risoluzione dei sistemi

Il valore di ciascuna incognita è dato dalla frazione avente per denominatore il determinante della matrice incompleta del sistema, per numeratore il determinante della matrice ottenuta sostituendo la colonna corrispondente all' incognita con la colonna dei termini noti.

Esempio 3

$$\left|\begin{array}{l} x+y+z=6 \\ 2x+y-z=1 \\ 2x-3y+z=-1 \end{array}\right. \qquad A=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$A_x=\begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \end{vmatrix} \quad A_y=\begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} \quad A_z=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \end{vmatrix}$$

<u>Determinante della matrice *A*</u>

Calcoliamo i complementi algebrici dei termini della prima riga *(scelta a piacere)*:

$$A_{11}=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}$$

$det\ A_{11}=-2;\ (1+1)$ è pari, quindi il complemento algebrico del primo termine sarà: $+(-2)=\mathbf{-2}$

$$A_{12}=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$det\ A_{12}=4;\ (1+2)$ è dispari, quindi il complemento algebrico del secondo termine sarà $\mathbf{-4}$

$$A_{13}=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}$$

$det\ A_{13}=-8;\ (1+3)$ è pari, quindi il complemento algebrico del terzo termine sarà: $+(-8)=\mathbf{-8}$

Moltiplichiamo i termini della prima riga per i rispettivi complementi algebrici e sommiamo i prodotti ottenuti:

$$det\ A=1(-2)+1(-4)+1(-8)=\mathbf{-14}$$

<u>Determinante della matrice A_x</u>

Calcoliamo i complementi algebrici dei termini della prima riga *(scelta a piacere)*:

$A_{x_{11}}=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}$ $det\ A_{x_{11}}=-2;\ (1+1)$ è pari, quindi il complemento algebrico del primo termine sarà: $+(-2)=\mathbf{-2}$

$A_{x_{12}}=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$ $det\ A_{x_{12}}=0;$ il complemento algebrico del secondo termine sarà $\mathbf{0}$

$A_{x_{13}}=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix}$ $det\ A_{x_{13}}=-2;\ (1+3)$ è pari, quindi il complemento algebrico del terzo termine sarà: $+(-2)=\mathbf{-2}$

$$det\ A_x=6(-2)+(-2)=\mathbf{-14}$$

<u>Determinante della matrice A_y</u>

Calcoliamo i complementi algebrici dei termini della seconda colonna:

$A_{y_{12}}=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$ $det\ A_{y_{12}}=4;\ (1+2)$ è dispari, quindi il complemento algebrico del primo termine sarà -4

$A_{y_{22}} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$ $\det A_{y_{22}} = -1;\ (2+2)$ è pari, quindi il complemento algebrico del secondo termine sarà: $+(-1) = \mathbf{-1}$

$A_{y_{32}} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$ $\det A_{y_{32}} = -3;\ (3+2)$ è dispari, quindi il complemento algebrico del terzo termine sarà: $-(-3) = +\mathbf{3}$

$$\det A_y = 6 \cdot (-4) + 1(-1) + 3(-1) = \mathbf{-28}$$

<u>Determinante della matrice A_z</u>

Calcoliamo i complementi algebrici dei termini della prima colonna:

$A_{z_{11}} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix}$ $\det A_{z_{11}} = 2;\ (1+1)$ è pari, quindi il complemento algebrico del primo termine sarà $\mathbf{2}$

$A_{z_{21}} = \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ -3 & -1 \end{vmatrix}$ $\det A_{z_{21}} = 17;\ (2+1)$ è dispari, quindi il complemento algebrico del secondo termine sarà $\mathbf{-17}$

$A_{z_{31}} = \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$ $\det A_{z_{31}} = -5;\ (3+1)$ è pari, quindi il complemento algebrico del terzo termine sarà $-\mathbf{5}$

$$\det A_z = 1.2 + 2(-17) + 2(-5) = \mathbf{-42}$$

$$x = \frac{det\ A_x}{det\ A} \qquad y = \frac{det\ A_y}{det\ A} \qquad z = \frac{det\ A_z}{det\ A}$$

$$x = \frac{-14}{-14} \qquad y = \frac{-28}{-14} \qquad z = \frac{-42}{-14}$$

$$x = 1; \qquad y = 2; \qquad z = 3$$